

# METODOLOGIA PARA MODELAGEM DE CONVERSORES UTILIZANDO O CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN

Felipe Berger, Marcos A. Salvador, Thiago A. Pereira, Telles B. Lazzarin, Roberto F. Coelho  
Universidade Federal de Santa Catarina, Instituto de Eletrônica de Potência, Florianópolis, SC - Brasil  
e-mail: felipe.berger@posgrad.ufsc.br, marcos.salvador@inep.ufsc.br, thiago.pereira@inep.ufsc.br, telles@inep.ufsc.br, roberto@inep.ufsc.br

**Resumo** – Este artigo apresenta uma nova metodologia aplicada como ferramenta à modelagem de conversores estáticos. A metodologia permite representar tais conversores por meio de um circuito equivalente de Thévenin visto a partir do par de terminais que contém o elemento cuja tensão ou corrente se deseja controlar, apresentando como principal vantagem a versatilidade com que as funções de transferências podem ser obtidas. A partir da análise de um circuito equivalente de Thévenin literal encontram-se modelos válidos para todos os conversores, distinguidos apenas pelas equações que descrevem os parâmetros  $V_{TH}$  e  $Z_{TH}$  de cada caso. A fim de validar a metodologia proposta, as funções de transferência orientadas ao controle de tensão e de corrente dos seis conversores cc-cc básicos não isolados são obtidas e validadas via simulação por meio da resposta ao degrau. Resultados experimentais referentes ao conversor Boost também são apresentados.

**Palavras-Chave** – Conversores cc-cc, Equivalente de Thévenin, Modelagem Dinâmica, Modelo Médio.

## METHODOLOGY FOR MODELING POWER CONVERTERS EMPLOYING THE THÉVENIN EQUIVALENT CIRCUIT

**Abstract** – This paper presents a new methodology applied as a tool for modeling static converters. The methodology allows representing such converters by an equivalent Thévenin circuit seen from the pair of terminals that contains the element which voltage or current is desirable to be controlled, and has as main advantage the versatility in which the transfer functions can be obtained. From the analysis of a literal Thévenin equivalent circuit it is possible to find models valid for all the converters, only distinguished by the equations that describe the parameters  $V_{TH}$  and  $Z_{TH}$  of each case. In order to validate the proposed methodology, the transfer functions oriented to control the voltage and the current of the six non-isolated basic dc-dc converters are obtained and validated by simulation considering the step response. Experimental results concerning the Boost converter are also presented.

**Keywords** – Average Model, DC-DC Converters, Dynamic Modeling, Thévenin Equivalent Circuit.

Artigo submetido 03/08/2017. Primeira revisão em 13/09/2017. Aceito para publicação em 18/11/2017 por recomendação do Editor Marcelo Cabral Cavalcanti.

## NOMENCLATURA

$\tilde{x}$	Pequenas perturbações da grandeza $x$ .
$X$	Valor médio da grandeza $x$ .
$v_S$	Tensão no interruptor.
$v_o$	Tensão na saída.
$i_D$	Corrente no diodo.
$i_L$	Corrente no indutor.
$D$	Razão cíclica.
$E$	Tensão de entrada.
$v_D$	Tensão no diodo.
$i_S$	Corrente no interruptor.
$i_{L1}$	Corrente no indutor $L_1$ .
$i_{L2}$	Corrente no indutor $L_2$ .
$v_{C1}$	Tensão no capacitor $C_1$ .
$V_{TH}$	Tensão de Thévenin.
$Z_{TH}$	Impedância de Thévenin.
$Z_L$	Impedância de carga.
$P$	Potência do conversor.
$R$	Resistência de saída.
$G_v$	Planta de tensão por razão cíclica.
$G_i$	Planta de corrente por razão cíclica.
$G_{vi}$	Planta de tensão por corrente.

## I. INTRODUÇÃO

Dentre os desafios associados à conversão eficiente de energia elétrica por meio de conversores estáticos, convém destacar os esforços empregados no desenvolvimento de estratégias de controle confiáveis, que garantam operação destes conversores de acordo com os requisitos estabelecidos na etapa de dimensionamento, e que assegurem a proteção de seus componentes, da fonte de alimentação e da carga suprida.

Neste sentido, é recorrente a necessidade de obtenção de modelos matemáticos acurados, que descrevam o comportamento dinâmico das variáveis a serem controladas, permitindo definir a estratégia de controle e projetar controladores adequados a cada aplicação.

Evidentemente, o fato de o funcionamento dos conversores estáticos estar baseado no uso de dispositivos que comutam em alta frequência (semicondutores) implica discontinuidades e não linearidades, impossibilitando a aplicação direta das ferramentas utilizadas na análise de circuitos lineares. Não obstante, a complexidade atrelada à modelagem de conversores estáticos aumenta à medida que o número de elementos armazenadores de energia que os compõem eleva-se, em decorrência do aumento da ordem das equações diferenciais que os descrevem.

Felizmente, conforme [1], na maior parte das aplicações, é possível aproximar as grandezas comutadas que descrevem

determinado conversor por seus respectivos valores médios calculados a cada período de comutação. Tal ação resulta em modelos médios de grandes sinais [1]-[14], onde os interruptores são substituídos por fontes dependentes de tensão ou de corrente, ainda descritas por equações não lineares [6].

Para contornar tais não linearidades e empregar ferramentas aplicáveis à análise de sistemas lineares, recorre-se a técnicas de linearização [2], [3], que resultam em modelos médios de pequenos sinais válidos apenas para pequenas perturbações em torno do ponto de operação. Matematicamente, estes modelos médios de pequenos sinais podem ser descritos por funções de transferência [4] ou matrizes de estados [2], dependendo do método adotado para modelar e controlar o conversor.

Na literatura, as metodologias de modelagem de conversores cc-cc tipicamente recaem na modelagem por circuito médio equivalente [4]-[8], [13], na modelagem do interruptor PWM [9], [10] ou em modelos médio em espaço de estados [11], [12], [14], [15]. A modelagem por circuito médio equivalente ou do interruptor PWM faz uso dos valores médios de tensões e correntes envolvidas na operação do conversor em um período de comutação, enquanto o modelo médio por espaço de estado requer as equações de estado em cada etapa de operação. É importante ressaltar que no modo de condução contínua (MCC) os três métodos de supracitados culminam no mesmo comportamento dinâmico e, portanto, nas mesmas funções de transferência [4], [6].

Neste artigo apresenta-se uma nova abordagem destinada à modelagem de conversores estáticos, que passam a ser descritos a partir de um circuito equivalente de Thévenin visto do par de terminais cuja tensão ou corrente deseja-se controlar. Tal método constitui uma ferramenta versátil, que permite a obtenção rápida de funções de transferência, mesmo quando os elementos alocados entre os terminais de interesse são modificados. De maneira a validar a metodologia desenvolvida, aplica-se o método proposto à modelagem dos seis conversores básicos não isolados em MCC, apresentando-se as respectivas funções de transferência e resposta ao degrau de cada um deles. Resultados experimentais obtidos a partir de um conversor *Boost* de 200 W validam a metodologia proposta.

## II. MODELOS MÉDIOS DE GRANDES E DE PEQUENOS SINAIS

Acerca das dificuldades que envolvem a modelagem de conversores estáticos, o primeiro desafio a ser superado é a descontinuidade gerada pela comutação. Comumente, o período de comutação é significativamente menor que as constantes de tempo do conversor, sendo assim, é possível aproximar as grandezas instantâneas por seus valores médios calculados a cada período de comutação, sem que haja perda de informação relacionada à dinâmica que se deseja controlar.

Do ponto de vista dos conversores, essa aproximação significa substituir os interruptores passivos e ativos por fontes dependentes de tensão ou de corrente. Tal técnica resulta na obtenção do chamado modelo médio de grandes sinais, que aproxima as grandezas comutadas do conversor

por seus valores médios calculados em um período de comutação.

A Figura 1 apresenta os modelos comutados dos conversores cc-cc analisados, enquanto a Figura 2 expõe os respectivos modelos médios de grandes sinais em modo de condução contínua. As fontes dependentes são especificadas em função dos valores médios das tensões/correntes dos interruptores que elas substituem. Este modelo resolve o problema da descontinuidade dos conversores, porém a não linearidade permanece, uma vez que tais tensões/correntes são descritas por equações não lineares, resultantes do produto de grandezas que variam no tempo tal como exemplificado para o caso do conversor *Boost* por:

$$\langle v_S \rangle = (1-d)v_o \quad (1)$$

$$\langle i_D \rangle = (1-d)i_L \quad (2)$$

A modelagem orientada ao controle clássico tem como o objetivo a obtenção de funções de transferência por meio da aplicação da transformada de Laplace, aplicável apenas a sistemas lineares e invariantes no tempo. Em virtude, contudo, de os conversores estáticos tipicamente apresentam comportamento não linear, recorre-se à linearização. Uma primeira opção consiste na expansão das funções não lineares que descrevem os conversores por meio da série de Taylor, tomando-se, posteriormente, apenas os termos lineares.

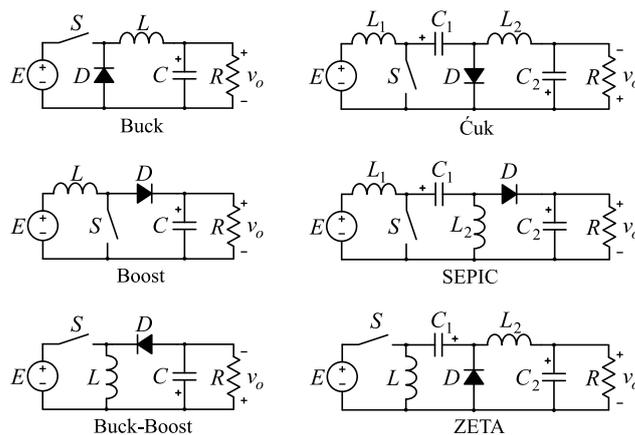


Fig. 1. Modelos comutados dos conversores Buck, Boost, Buck-Boost, Ćuk, SEPIC e ZETA.

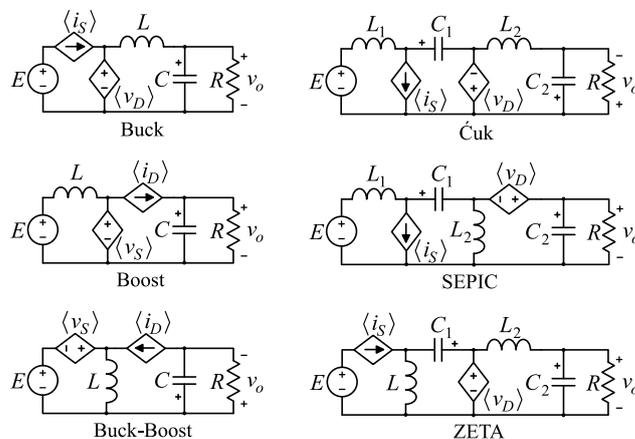


Fig. 2. Modelos médios de grandes sinais dos conversores Buck, Boost, Buck-Boost, Ćuk, SEPIC e ZETA.

Alternativamente, pode-se considerar que o conversor tem comportamento linear nos entornos de um ponto de operação  $X$  (parcela cc), desde que a perturbações  $\tilde{x}$  (parcela ca) em torno deste ponto sejam suficientemente pequenas [4]. Pode-se então expressar todas as variáveis do sistema pela soma das duas parcelas: a primeira cc, que descreve o ponto de operação; a segunda ca, que por sua vez representa a pequena perturbação, isto é:

$$\langle x \rangle = X + \tilde{x}. \quad (3)$$

Aplicando a linearização descrita em (3) às variáveis de (1) e (2), obtêm-se dois conjuntos de equações. O primeiro, representando o ponto de operação, é expresso por:

$$V_S = (1-D)V_o \quad (4)$$

$$I_D = (1-D)I_L \quad (5)$$

enquanto o segundo representa as pequenas variações em torno deste ponto, conforme:

$$\tilde{v}_S = (1-D)\tilde{v}_o - \tilde{d}V_o - \tilde{d}\tilde{v}_o \quad (6)$$

$$\tilde{i}_D = (1-D)\tilde{i}_L - \tilde{d}I_L - \tilde{d}\tilde{i}_L. \quad (7)$$

As equações (6) e (7) permanecem não lineares devido aos termos de segunda ordem, representados pelo produto de perturbações. Contudo, da suposição de que tais perturbações são suficientemente pequenas, infere-se que os termos de segunda ordem serão relativamente menores do que os demais e, portanto, podem ser descartados sem que haja perda de generalidade. Tal suposição resulta em:

$$\tilde{v}_S = (1-D)\tilde{v}_o - \tilde{d}V_o \quad (8)$$

$$\tilde{i}_D = (1-D)\tilde{i}_L - \tilde{d}I_L. \quad (9)$$

O desacoplamento entre os termos cc e ca promovido pela linearização permite representar o conversor por meio de seu modelo médio de pequenos sinais, que considera apenas os termos ca. A fonte de tensão de entrada, aqui considerada ideal, não varia e, portanto, é representada por um curto circuito. A Figura 3 e a Tabela I apresentam os modelos médios de pequenos sinais dos conversores cc-cc básicos não isolados.

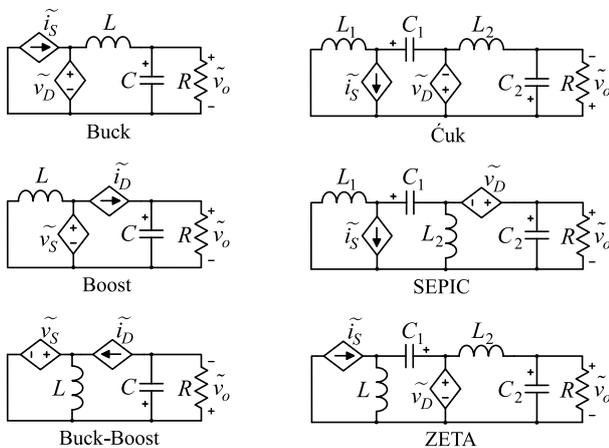


Fig. 3. Modelos médios de pequenos sinais dos conversores Buck, Boost, Buck-Boost, Ćuk, SEPIC e ZETA.

TABELA I

Equações dos Modelos Médios de Pequenos Sinais dos Conversores cc-cc Básicos Não Isolados

Conversor	Equações
Buck	$\tilde{v}_D = \tilde{d}E$ $\tilde{i}_S = D\tilde{i}_L + \tilde{d}I_L$
Boost	$\tilde{i}_D = (1-D)\tilde{i}_L - \tilde{d}I_L$ $\tilde{v}_S = (1-D)\tilde{v}_o - \tilde{d}V_o$
Buck-Boost	$\tilde{i}_D = (1-D)\tilde{i}_L - \tilde{d}I_L$ $\tilde{v}_S = (1-D)\tilde{v}_o - \tilde{d}(V_o - E)$
Ćuk	$\tilde{v}_D = D\tilde{v}_{C1} + \tilde{d}V_{C1}$ $\tilde{i}_S = D\tilde{i}_{L1} + D\tilde{i}_{L2} + \tilde{d}(I_{L1} + I_{L2})$
SEPIC	$\tilde{v}_D = D\tilde{v}_{C1} + D\tilde{v}_o + \tilde{d}(V_{C1} + V_o)$ $\tilde{i}_S = D\tilde{i}_{L1} + D\tilde{i}_{L2} + \tilde{d}(I_{L1} + I_{L2})$
ZETA	$\tilde{v}_D = D\tilde{v}_{C1} + \tilde{d}(V_{C1} + E)$ $\tilde{i}_S = D\tilde{i}_{L1} + D\tilde{i}_{L2} + \tilde{d}(I_{L1} + I_{L2})$

### III. CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN E O MODELO DINÂMICO

#### A. Tensão de Saída por Razão Cíclica

Os circuitos apresentados na Figura 3 são lineares e, portanto, permitem a utilização de ferramentas de análise de circuitos lineares. A primeira ferramenta que pode ser utilizada é a transformada de Laplace, que permite representar o circuito no domínio da frequência e extrair uma função de transferência. A função de transferência permitirá conhecer a resposta dinâmica de uma variável do circuito em função de perturbações em outra variável. Comumente é de interesse conhecer a resposta dinâmica da tensão de saída. No entanto, a obtenção do modelo depende da definição de uma carga, usualmente um filtro capacitivo e um resistor, o que torna o modelo obtido restrito, válido somente para a carga utilizada. Visando a obtenção de um modelo generalista capaz de se adequar a qualquer carga, faz-se o uso do equivalente de Thévenin vista da saída do conversor. A fim de encontrar o circuito equivalente de Thévenin de determinado conversor, substitui-se a carga por uma fonte de teste de valor  $(\tilde{v}_o, \tilde{i}_o)$ , conforme é exemplificado para o conversor Boost, conforme Figura 4.

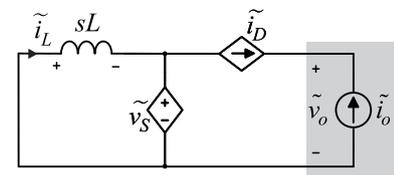


Fig. 4. Circuito elétrico a ser analisado para obtenção do equivalente de Thévenin visto da saída do conversor Boost.

Aplicando-se as leis de Kirchhoff ao circuito da Figura 4, encontram-se:

$$-(1-D)\tilde{i}_L + \tilde{d}I_L - \tilde{i}_o = 0 \quad (10)$$

$$sL\tilde{i}_L + (1-D)\tilde{v}_o - \tilde{d}V_o = 0. \quad (11)$$

A resolução do sistema descrito por (10) e (11) resulta em:

$$\tilde{v}_o = \tilde{d} \frac{-sLI_L + (1-D)V_o}{(1-D)^2} + \tilde{i}_o \frac{sL}{(1-D)^2}. \quad (12)$$

É simples demonstrar que as constantes  $V_o$  e  $I_L$  no conversor Boost podem ser descritas em função da tensão de entrada e da potência do conversor, isto é:

$$I_L = \frac{P}{E} \quad (13)$$

$$V_o = \frac{E}{(1-D)}. \quad (14)$$

A substituição de (13) e (14) em (12) conduz a:

$$\tilde{v}_o = \tilde{d} \frac{-s \frac{LP}{E} + E}{(1-D)^2} + \tilde{i}_o \frac{sL}{(1-D)^2}. \quad (15)$$

A partir de (15) é possível extrair o valor da tensão  $V_{TH}$  e da impedância  $Z_{TH}$  equivalente de Thévenin, dados respectivamente por:

$$V_{TH} = \tilde{d} \frac{-s \frac{LP}{E} + E}{(1-D)^2} \quad (16)$$

$$Z_{TH} = \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{i}_o} = \frac{sL}{(1-D)^2}. \quad (17)$$

Para obtenção de  $V_{TH}$  deve-se considerar a saída do conversor em circuito aberto, o que implica  $\tilde{i}_o$  nulo, enquanto para obtenção de  $Z_{TH}$ , considera-se entrada nula, isto é  $\tilde{d}=0$ .

O mesmo procedimento pode ser aplicado aos demais conversores cc-cc, variando apenas o esforço algébrico necessário para resolução dos sistemas de equações de cada conversor. A Tabela II resume os resultados encontrados. Conforme discutido anteriormente, ao circuito equivalente de Thévenin pode ser adicionado qualquer tipo de carga linear. Sendo assim, tendo em vista a generalização dos modelos, emprega-se uma impedância  $Z_L$ , como na Figura 5.

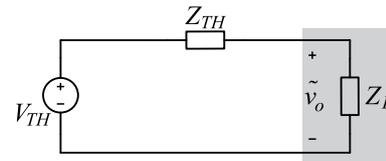


Fig. 5. Circuito equivalente de Thévenin com carga  $Z_L$ .

A tensão de saída do circuito da Figura 5 pode ser descrita por:

$$\tilde{v}_o = V_{TH} \frac{Z_L}{Z_L + Z_{TH}}. \quad (18)$$

TABELA II

Parâmetros dos Circuitos Equivalentes de Thévenin Vistos da Saída dos Conversores cc-cc Básicos Não Isolados

Conversor	$V_{TH}$	$Z_{TH}$
Buck	$\tilde{d}E$	$sL$
Boost	$\tilde{d} \frac{-s \frac{LP}{E} + E}{(1-D)^2}$	$\frac{sL}{(1-D)^2}$
Buck-Boost	$-\tilde{d} \frac{-s \frac{LP}{DE} + E}{(1-D)^2}$	$\frac{sL}{(1-D)^2}$
Ćuk	$-\tilde{d} \frac{s^2 \frac{L_1 C_1 E}{1-D} - s \frac{L_1 P}{E} + E}{s^2 L_1 C_1 + (1-D)^2}$	$\frac{s^3 L_1 L_2 C_1 + s [L_1 D^2 + L_2 (1-D)^2]}{s^2 L_1 C_1 + (1-D)^2}$
SEPIC	$\tilde{d} \frac{-s^3 \frac{L_1 L_2 C_1 P}{DE} + s^2 C_1 E (L_1 + L_2) - s \frac{L_1 P}{E} + E}{s^2 C_1 (L_1 + L_2) (1-D)^2 + (1-D)^2}$	$\frac{s^3 L_1 L_2 C_1 + s [L_1 D^2 + L_2 (1-D)^2]}{s^2 C_1 (L_1 + L_2) (1-D)^2 + (1-D)^2}$
ZETA	$\tilde{d} \frac{s^2 \frac{L_1 C_1 E}{1-D} - s \frac{L_1 P}{E} + E}{s^2 L_1 C_1 + (1-D)^2}$	$\frac{s^3 L_1 L_2 C_1 + s [L_1 D^2 + L_2 (1-D)^2]}{s^2 L_1 C_1 + (1-D)^2}$

Logo, pode-se obter a função de transferência que relaciona a tensão de saída com a razão cíclica de qualquer um dos conversores cc-cc analisados a partir da substituição das respectivas equações que descrevem  $V_{TH}$ ,  $Z_{TH}$  e  $Z_L$  em (18). No caso do conversor Boost,  $Z_L$  é tipicamente formada por um par RC paralelo, cuja impedância é expressa por:

$$Z_L = R \parallel Z_C = \frac{R}{sRC + 1}. \quad (19)$$

A substituição de (16), (17) e (19) em (18) resulta em:

$$G_v(s) = \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{d}} = \frac{-s \frac{RLP}{E} + RE}{s^2 RLC + sL + R(1-D)^2} \quad (20)$$

sendo a potência  $P$  de saída dada por:

$$P = \frac{V_o^2}{R}. \quad (21)$$

A Tabela III resume a aplicação deste procedimento para obtenção das plantas  $G_v(s)$  dos conversores cc-cc básicos não isolados, considerando-se, em todos os casos, um par RC como carga do circuito equivalente de Thévenin.

Vale ressaltar que se a impedância  $Z_L$  fosse alterada para, por exemplo, contemplar a resistência série equivalente do capacitor, uma nova função de transferência seria obtida, mas o esforço matemático seria reduzido, haja vista que os parâmetros  $V_{TH}$  e  $Z_{TH}$  não precisam ser redefinidos.

### B. Corrente no Indutor por Razão Cíclica

Em diversas aplicações, busca-se conhecer o comportamento dinâmico da corrente em algum dos indutores do circuito. A técnica de obtenção do circuito equivalente de Thévenin aqui proposta pode também ser aplicada a partir dos terminais do indutor cuja corrente deseja se controlar, conforme mostra a Figura 6 para o caso do conversor Boost.

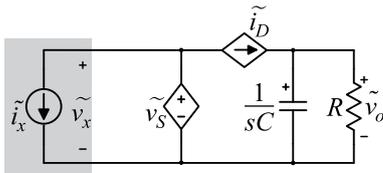


Fig. 6. Circuito elétrico a ser analisado para obtenção do circuito equivalente de Thévenin visto do indutor do conversor Boost.

Aplicando-se as leis de Kirchhoff ao circuito da Figura 6, é possível obter:

$$\tilde{v}_o (sC + 1/R) - (1-D)\tilde{i}_L + \tilde{d}I_L = 0 \quad (22)$$

$$\tilde{v}_x + (1-D)\tilde{v}_o - \tilde{d}V_o = 0 \quad (23)$$

$$\tilde{i}_L = -\tilde{i}_x. \quad (24)$$

A solução do sistema de equações descrito por (22)-(24) culmina em:

$$\tilde{v}_x = \tilde{d} \frac{sRCV_o + [V_o + I_L R(1-D)]}{sRC + 1} + \tilde{i}_x \frac{R(1-D)}{sRC + 1}. \quad (25)$$

A substituição de (13), (14) e (21) em (25) resulta em:

$$\tilde{v}_x = \tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + 2}{sRC + 1} + \tilde{i}_x \frac{R(1-D)}{sRC + 1}. \quad (26)$$

A partir de (26) é possível encontrar  $V_{TH}$  e  $Z_{TH}$  vistos dos terminais do indutor, dados respectivamente por:

$$V_{TH} = \tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + 2}{sRC + 1} \quad (27)$$

$$Z_{TH} = \frac{\tilde{v}_x}{\tilde{i}_x} = \frac{R(1-D)}{sRC + 1}. \quad (28)$$

Em aplicações de correção de fator de potência, por exemplo, controla-se a corrente no indutor de entrada dos conversores Boost e SEPIC. Já nos conversores Buck, Ćuk e ZETA é comum controlar-se a corrente nos indutores de saída. O controle da corrente no conversor Buck-Boost não é usual devido à posição do indutor, ainda assim, um modelo pode ser obtido usando o mesmo procedimento. A Tabela IV resume os parâmetros relacionados aos circuitos equivalentes de Thévenin vistos a partir dos indutores de interesse para cada conversor cc-cc básico não isolado.

Partindo-se do circuito equivalente de Thévenin, ao qual se adiciona um indutor como carga, obtém-se o circuito genérico ilustrado na Figura 7, cuja análise resulta em:

$$\tilde{i}_L = \frac{V_{TH}}{Z_{TH} + sL}. \quad (29)$$

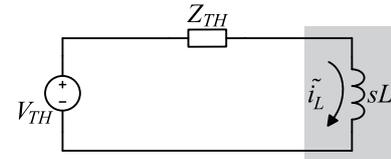


Fig. 7. Circuito equivalente de Thévenin visto do indutor.

Logo, pode-se obter a função de transferência que relaciona a corrente no indutor com a razão cíclica para qualquer um dos conversores cc-cc analisados por meio da simples substituição das respectivas equações que descrevem  $V_{TH}$  e  $Z_{TH}$  (Tabela IV) em (29). Tomando-se o conversor Boost como exemplo, encontra-se:

$$G_i(s) = \frac{\tilde{i}_L}{\tilde{d}} = \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + 2}{s^2 RLC + sL + R(1-D)^2}. \quad (30)$$

A Tabela V apresenta as plantas  $G_i(s)$  dos conversores cc-cc básicos não isolados obtidos a partir de (29).

Logicamente, caso a resistência parasita do indutor fosse incluída no modelo, uma nova planta seria obtida, mas os parâmetros  $V_{TH}$  e  $Z_{TH}$  manteriam-se inalterados, facilitando a análise.

### C. Tensão de Saída por Corrente no Indutor

Para fins de controle, é usual ainda determinar o comportamento dinâmico da tensão de saída em função da corrente no indutor, o que permite o uso de controladores cascadeados. As plantas  $G_{vi}(s)$  dos conversores analisados são apresentadas na Tabela VI, a partir de:

$$G_{vi}(s) = \frac{G_v(s)}{G_i(s)} = \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{d}} \frac{\tilde{d}}{\tilde{i}_L} = \frac{\tilde{v}_o}{\tilde{i}_L}. \quad (31)$$

TABELA III

Funções de Transferência que Relacionam a Tensão de Saída com a Razão Cíclica dos Conversores cc-cc Básicos Não Isolados

Conversor	Equações
Buck	$G_v(s) = \frac{RE}{s^2RLC + sL + R}$
Boost	$G_v(s) = \frac{-s \frac{RLP}{E} + RE}{s^2RLC + sL + R(1-D)^2}$
Buck-Boost	$G_v(s) = -\frac{-s \frac{RLP}{DE} + RE}{s^2RLC + sL + R(1-D)^2}$
Ćuk	$G_v(s) = \frac{s^2 \frac{RL_1C_1E}{1-D} - s \frac{RL_1P}{E} + RE}{s^4RL_1L_2C_1C_2 + s^3L_1L_2C_1 + s^2R[L_1C_2D^2 + L_2C_2(1-D)^2 + L_1C_1] + s[L_1D^2 + L_2(1-D)^2] + R(1-D)^2}$
SEPIC	$G_v(s) = \frac{-s^3 \frac{RL_1L_2C_1P}{DE} + s^2[RC_1E(L_1 + L_2)] - s \frac{RL_1P}{E} + RE}{s^4RL_1L_2C_1C_2 + s^3L_1L_2C_1 + s^2R[L_1C_2D^2 + (L_2C_2 + L_2C_1 + L_1C_1)(1-D)^2] + s[L_1D^2 + L_2(1-D)^2] + R(1-D)^2}$
ZETA	$G_v(s) = \frac{s^2 \frac{RL_1C_1E}{1-D} - s \frac{RL_1P}{E} + RE}{s^4RL_1L_2C_1C_2 + s^3L_1L_2C_1 + s^2R[L_1C_2D^2 + L_2C_2(1-D)^2 + L_1C_1] + s[L_1D^2 + L_2(1-D)^2] + R(1-D)^2}$

TABELA IV

Parâmetros dos Circuitos Equivalentes de Thévenin Vistos dos Indutores dos Conversores cc-cc Básicos Não Isolados

Conversor	$V_{TH}$	$Z_{TH}$
Buck	$\tilde{d}E$	$\frac{R}{sRC + 1}$
Boost	$\tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + 2}{sRC + 1}$	$\frac{R(1-D)^2}{sRC + 1}$
Buck-Boost	$\tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + (D+1)}{sRC + 1}$	$\frac{R(1-D)^2}{sRC + 1}$
Ćuk ( $L_2$ )	$\tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1[C_1 - C_2 \frac{D^2}{(1-D)}] + s[RC_2(1-D) - \frac{L_1D^2}{R(1-D)}] + (1-D)}{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1C_1 + sRC_2(1-D)^2 + (1-D)^2}$	$\frac{s^2RL_1(C_1 + C_2D^2) + sL_1D^2 + R(1-D)^2}{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1C_1 + sRC_2(1-D)^2 + (1-D)^2}$
SEPIC ( $L_1$ )	$\tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{s^3RL_2C_1C_2 + s^2L_2[C_1(D+1) + C_2D] + s(RC_2D + \frac{L_2D}{R}) + 2D}{s^3RL_2C_1C_2 + s^2L_2C_1 + s\{R[C_1(1-D)^2 + C_2D^2]\} + D^2}$	$\frac{s^2RL_2(C_1 + C_2)(1-D)^2 + sL_2(1-D)^2 + R(1-D)^2}{s^3RL_2C_1C_2 + s^2L_2C_1 + sR[C_1(1-D)^2 + C_2D^2] + D^2}$
ZETA ( $L_2$ )	$\tilde{d} \frac{E}{(1-D)} \frac{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1[C_1 - C_2 \frac{D^2}{(1-D)}] + s[RC_2(1-D) - \frac{L_1D^2}{R(1-D)}] + (1-D)}{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1C_1 + sRC_2(1-D)^2 + (1-D)^2}$	$\frac{s^2RL_1(C_1 + C_2D^2) + sL_1D^2 + R(1-D)^2}{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1C_1 + sRC_2(1-D)^2 + (1-D)^2}$

TABELA V

Funções de Transferência que Relacionam a Corrente no Indutor com a Razão Cíclica dos Conversores cc-cc Básicos Não Isolados

Conversor	Equações
Buck	$G_i(s) = E \frac{sRC + 1}{s^2RLC + sL + R}$
Boost	$G_i(s) = \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + 2}{s^2RLC + sL + R(1-D)^2}$
Buck-Boost	$G_i(s) = \frac{E}{(1-D)} \frac{sRC + (D+1)}{s^2RLC + sL + R(1-D)^2}$
Ćuk (L <sub>2</sub> )	$G_i(s) = \frac{E}{(1-D)} \frac{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1 \left[ C_1 - \frac{C_2D^2}{(1-D)} \right] + s \left[ RC_2(1-D) - \frac{L_1D^2}{R(1-D)} \right] + (1-D)}{s^4RL_1L_2C_1C_2 + s^3L_1L_2C_1 + s^2R \left[ L_1C_2D^2 + L_2C_2(1-D)^2 + L_1C_1 \right] + s \left[ L_1D^2 + L_2(1-D)^2 \right] + R(1-D)^2}$
SEPIC (L <sub>1</sub> )	$G_i(s) = \frac{E}{(1-D)} \frac{s^3RL_2C_1C_2 + s^2 \left[ C_1 + D(C_1 + C_2) \right] + s \left( RC_2 + \frac{L_2}{R} \right) D + 2D}{s^4RL_1L_2C_1C_2 + s^3L_1L_2C_1 + s^2R \left[ L_1C_2D^2 + (L_2C_2 + L_2C_1 + L_1C_1)(1-D)^2 \right] + s \left[ L_1D^2 + L_2(1-D)^2 \right] + R(1-D)^2}$
ZETA (L <sub>2</sub> )	$G_i(s) = \frac{E}{(1-D)} \frac{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1 \left[ C_1 - \frac{C_2D^2}{(1-D)} \right] + s \left[ RC_2(1-D) - \frac{L_1D^2}{R(1-D)} \right] + (1-D)}{s^4RL_1L_2C_1C_2 + s^3L_1L_2C_1 + s^2R \left[ L_1C_2D^2 + L_2C_2(1-D)^2 + L_1C_1 \right] + s \left[ L_1D^2 + L_2(1-D)^2 \right] + R(1-D)^2}$

TABELA VI

Funções de Transferência que Relacionam a Tensão de Saída com a Corrente no Indutor dos Conversores cc-cc Básicos Não Isolados

Conversor	Equações
Buck	$G_{vi}(s) = \frac{R}{sRC + 1}$
Boost	$G_{vi}(s) = \frac{1}{(1-D)} \frac{-sL + R(1-D)^2}{sRC + 2}$
Buck-Boost	$G_{vi}(s) = -\frac{1}{(1-D)} \frac{-sLD + R(1-D)^2}{sRC + (D+1)}$
Ćuk (L <sub>2</sub> )	$G_{vi}(s) = -\frac{1}{(1-D)} \frac{s^2RL_1C_1(1-D) - sL_1D^2 + R(1-D)^2}{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1 \left[ C_1 - \frac{C_2D^2}{(1-D)} \right] + s \left[ RC_2(1-D) - \frac{L_1D^2}{R(1-D)} \right] + (1-D)}$
SEPIC (L <sub>1</sub> )	$G_{vi}(s) = \frac{1}{(1-D)} \frac{-s^3(L_1L_2C_1D) + s^2 \left[ RC_1(L_1 + L_2)(1-D)^2 \right] - sL_1D^2 + R(1-D)^2}{s^3RL_2C_1C_2 + s^2 \left[ C_1 + D(C_1 + C_2) \right] + s \left( RC_2 + \frac{L_2}{R} \right) D + 2D}$
ZETA (L <sub>2</sub> )	$G_{vi}(s) = \frac{1}{(1-D)} \frac{s^2RL_1C_1(1-D) - sL_1D^2 + R(1-D)^2}{s^3RL_1C_1C_2 + s^2L_1 \left[ C_1 - \frac{C_2D^2}{(1-D)} \right] + s \left[ RC_2(1-D) - \frac{L_1D^2}{R(1-D)} \right] + (1-D)}$

#### IV. VALIDAÇÃO POR SIMULAÇÃO

Para validar a metodologia, foram realizadas simulações para cada um dos seis conversores cc-cc, empregando os parâmetros da Tabela VII, com o intuito de confrontar os resultados provenientes dos circuitos comutados e das respectivas funções de transferência. Tais resultados seguem ilustrados nas Figuras 8 e 9.

**TABELA VII**  
**Parâmetros Utilizados nas Simulações dos Conversores**

	Buck	Boost	Buck-boost	Ćuk	SEPIC	ZETA
$E$	300 V	120 V	300 V	300 V	120 V	120 V
$f_s$	50 kHz	50 kHz	50 kHz	50 kHz	50 kHz	50 kHz
$L_1$	667 $\mu$ H	390 $\mu$ H	720 $\mu$ H	1,8 mH	2,8 mH	2,8 mH
$L_2$	-	-	-	1,2 mH	4,7 mH	4,7 mH
$C_1$	1,45 $\mu$ F	470 $\mu$ F	10 $\mu$ F	4,0 $\mu$ F	210 nF	120 nF
$C_2$	-	-	-	1,25 $\mu$ F	2,5 $\mu$ F	200 nF
$R_o$	40 $\Omega$	12 $\Omega$	40 $\Omega$	40 $\Omega$	250 $\Omega$	100 $\Omega$
$D$	0,66	0,42	0,40	0,40	0,63	0,43
$step$	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01

Como as funções de transferência representam o modelo médio de pequenos sinais e, portanto, são válidas somente para pequenas variações em torno do ponto de operação escolhido, a validação elaborada consiste na aplicação de um pequeno degrau (*step*) de razão cíclica e no monitoramento das grandezas de interesse, isto é, a tensão de saída e a corrente no indutor.

As formas de onda retratadas nas Figuras 8 e 9 correspondem, respectivamente, às respostas oriundas das simulações que relacionam a tensão de saída com razão cíclica e a corrente no indutor com razão cíclica. A conformidade entre as respostas do modelo comutado e das funções de transferência valida a metodologia proposta para obtenção de  $G_v(s)$  e  $G_i(s)$  e, conseqüentemente,  $G_{vi}(s)$ .

#### V. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Com o intuito de validar experimentalmente a metodologia, realizaram-se também alguns testes a partir de um conversor cc-cc tipo Boost, cujos parâmetros estão descritos na Tabela VIII. Os resultados experimentais obtidos seguem ilustrados na Figura 10 (a).

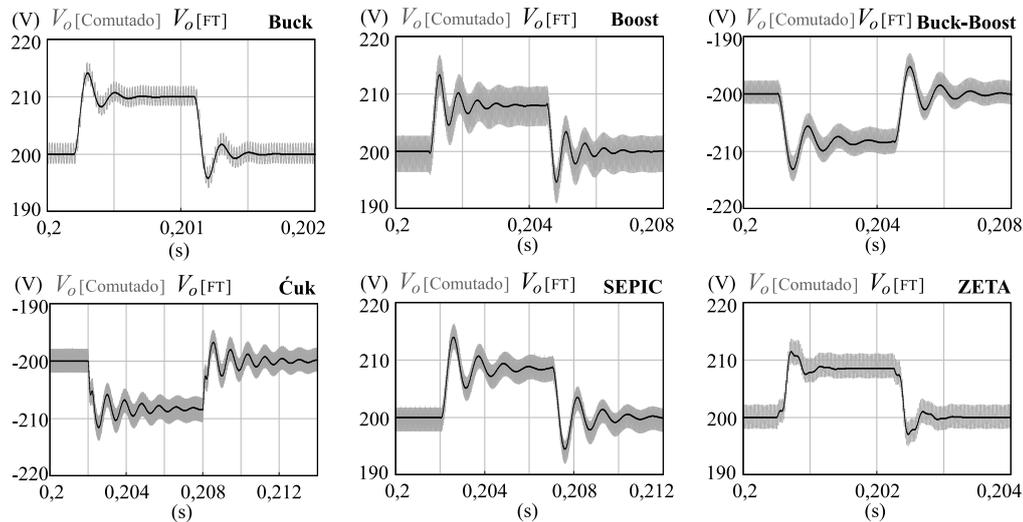


Fig. 8. Curvas de validação das funções de transferência da tensão de saída por razão cíclica  $G_v(s)$  dos conversores cc-cc básicos não isolados.

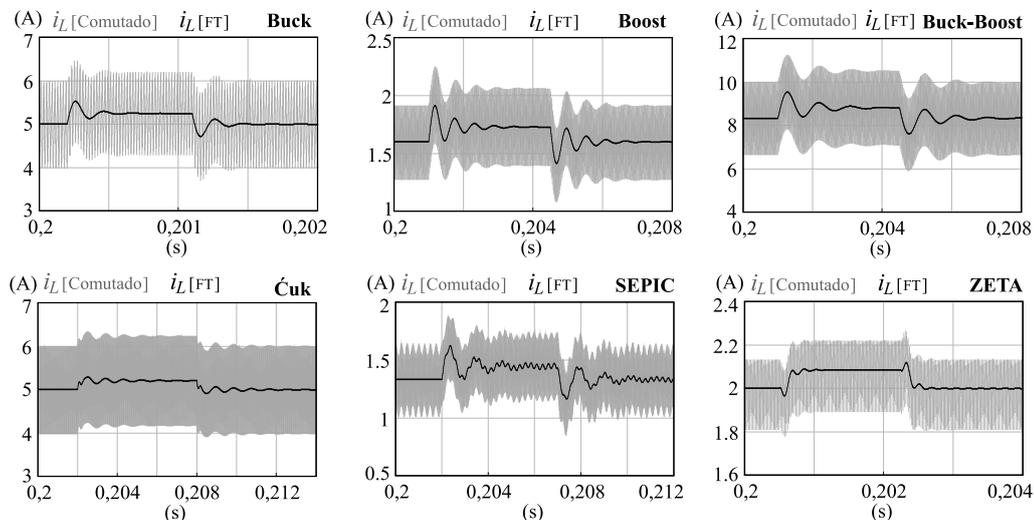
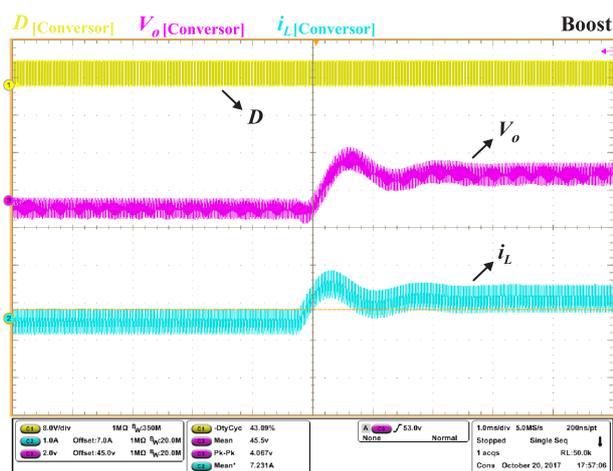
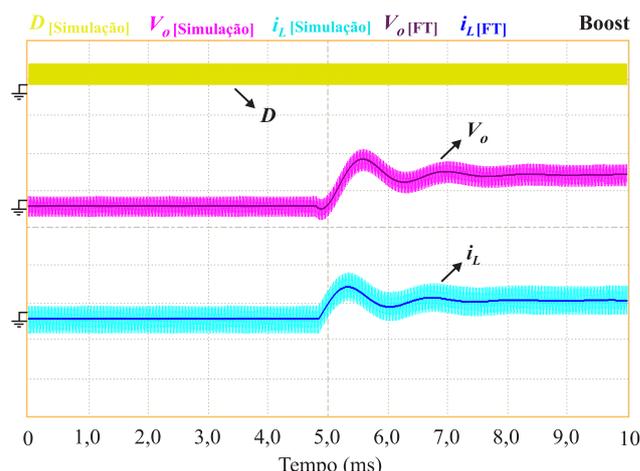


Fig. 9. Curvas de validação das funções de transferência da corrente no indutor por razão cíclica  $G_i(s)$  dos conversores cc-cc básicos não isolados.



(a)



(b)

Fig. 10. Resultados experimentais (a) e de simulação (b) do conversor Boost considerando as especificações da Tabela VIII. Escala de tempo: 1 ms/div;  $D$ : 8 V/div;  $V_o$ : 2 V/div;  $i_L$ : 1 A/div; *offset* de 45 V na tensão de saída e de 7 A na corrente do indutor.

TABELA VIII

Parâmetros Utilizados nos Testes com o Protótipo do Conversor cc-cc Boost

$E$	$f_s$	$L$	$C_o$	$R_o$	$D$	$step$
26,3 V	40 kHz	390 $\mu$ H	40 $\mu$ F	11,6 $\Omega$	0,43	0,02

A fim de melhorar a visualização do degrau na tela do osciloscópio, adicionou-se um *offset* na forma de onda da tensão e da corrente. No instante  $t$  igual a 5 ms é aplicado um degrau positivo de 0,02 na razão cíclica. Observa-se que a resposta dinâmica experimentalmente obtida, Figura 10 (a), apresenta-se em conformidade com os resultados provenientes de simulação e das respectivas funções de transferência, Figura 10 (b), evidenciando, inclusive, o efeito do zero no semiplano direito que confere a característica de fase não mínima ao conversor Boost.

## V. CONCLUSÕES

O presente artigo propôs a aplicação do teorema de Thévenin para obtenção de modelos dinâmicos dos conversores cc-cc básicos não isolados, contornadas suas características de descontinuidade e não linearidade.

A partir da análise do circuito equivalente de Thévenin visto dos terminais do elemento cuja tensão ou corrente de deseja controlar, são extraídas, respectivamente por meio de (18), (29) e (31), as diversas funções de transferência que modelam os conversores, conforme resumem as Tabelas III, V e VI. Tais funções de transferência foram validadas por meio de simulações e experimentação, permitindo constatar que a resposta dinâmica das variáveis de interesse do conversor em função de pequenas perturbações inseridas na razão cíclica coincide com a resposta do modelo comutado.

O método proposto aplica-se à determinação de funções de transferência orientadas ao controle de qualquer conversor estático que possa ser representado por um circuito equivalente de Thévenin. Como principal vantagem da metodologia apresentada, pode-se destacar sua generalidade e o fato de permitir corrigir rapidamente a função de transferência, caso seja necessário alterar o elemento

conectado ao par de terminais de interesse, evitando, assim, que uma análise completa tenha que ser realizada.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES e FINEP pelo apoio financeiro e bolsas de estudo.

## REFERÊNCIAS

- [1] G. W. Wester, R. D. Middlebrook, "Low-Frequency Characterization of Switched dc-dc Converters", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, vol. AES-9, n° 3, p. 376–385, Maio 1973.
- [2] R. D. Middlebrook, S. Čuk, "A general unified approach to modelling switching-converter power stages", in *Proc. of PESC - Power Electronics Specialists Conference*, p. 18–34, 1976.
- [3] M. G. Giesselmann, "Averaged and cycle by cycle switching models for buck, boost, buck-boost and Čuk converters with common average switch model", in *Proc. of IECEC - Intersociety Energy Conversion Engineering Conference*, vol. 1, p. 337–341, 1997.
- [4] R. W. Erickson, D. Maksimović, *Fundamentals of power electronics*, Mass: Kluwer Academic, 2ª Edição. Norwell, 2001.
- [5] Y. W. Lu, G. Feng, Y.-F. Liu, "A large signal dynamic model for DC-to-DC converters with average current control", in *Proc. of APEC - Applied Power Electronics Conference and Exposition*, vol. 2, p. 797–803, 2004.
- [6] M. K. Kazimierczuk, *Pulse-width Modulated DC-DC Power Converters*, Wiley, 2ª Edição, 2008.
- [7] J. G. Kassakian, M. F. Schecht, G. C. Verghese, *Principles of Power Electronics*, Addison-Wesley, New York, 1992.
- [8] D. Maksimovic, A. M. Stankovic, V. J. Thottuveil, G. C. Verghese, "Modeling and simulation of power electronic converters," *Proc. IEEE*, vol. 89, no. 6, pp. 898–912, Jun. 2001.
- [9] V. Vorperian, "Simplified analysis of PWM converters using the model of PWM switches, Part I:

Continuous conduction mode,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, vol. AES-26, pp. 490–496, Maio 1990.

- [10] H. J. N. Spruijt, D. M. O. Sullivan, “PWM-Switch Modeling of DC-DC Converters,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 10, no. 6, pp. 659–665, Nov. 1995.
- [11] S. R. Sanders, G. C. Verghese, “Synthesis of averaged circuit models for switched power converters,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 8, pp. 905–915, Aug. 1991.
- [12] A. Davoudi, J. Jatskevich, T. De Rybel, “Numerical state-space average-value modeling of PWM DC-DC converters operating in DCM and CCM,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 21, n.º. 4, pp. 1003-1012, July 2006.
- [13] R. F. Coelho, R. Schweitzer, D. C. Martins. “Obtenção de modelos médios para grandes sinais voltados à simulação de conversores estáticos”, in *XIX Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1-6, 2012.
- [14] L. Corradini, D. Maksimović, P. Mattavelli, R. Zane. *Digital Control of High-frequency Switched-mode Power Converters*. John Wiley & Sons Incorporated, 2015.
- [15] A. Ayachit, A. Reatti, M. K. Kazimierczuk, “Small-signal modeling of PWM dual-SEPIC dc-dc converter by circuit averaging technique”, in *42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 3606–3611, 2016.

#### DADOS BIOGRÁFICOS

**Felipe Berger** graduou-se em Engenharia Elétrica pela Universidade do Estado de Santa Catarina em 2015. Atualmente é estudante de mestrado do programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Santa Catarina. Suas áreas de interesse incluem conversores estáticos, inversores e sistemas embarcados.

**Marcos Antônio Salvador**, nascido em Blumenau, SC, em junho de 1985 é Engenheiro Eletricista (2012), e Mestre (2014) pela Fundação Universidade Regional de Blumenau (FURB). Atualmente cursa doutorado na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) no Instituto de Eletrônica de Potência (INEP). Atuou na indústria eletroeletrônica de 1999 a 2012 e como professor no ensino superior de 2014 a

2015. Suas áreas de interesse incluem modelagem e controle de conversores estáticos, conversores cc-cc de alto ganho, inversores, energias renováveis, armazenamento de energia, processamento digital de sinais.

**Thiago Antonio Pereira**, nascido em Florianópolis, SC, Brasil, em 17 de março de 1990 é Tecnólogo em Mecatrônica Industrial (2011) pelo IFSC, Engenharia Elétrica (2016) pela UFSC. Atualmente é aluno de mestrado em Engenharia Elétrica da UFSC, desenvolvendo atividades de pesquisa e desenvolvimento no Instituto de Eletrônica de Potência (INEP). Suas áreas de interesse são: eletrônica de potência e industrial, sistemas de controle eletrônicos, modelagem e controle de conversores estáticos, energia solar, microrredes CC e CA, inversores e qualidade do processamento da energia elétrica. Thiago A. Pereira é membro da Sociedade Brasileira de Eletrônica de Potência (SOBRAEP) e do IEEE.

**Telles Brunelli Lazzarin**, nascido em Criciúma, Santa Catarina, Brasil, em 1979. Recebeu o grau de Engenheiro eletricista, mestre e doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, Brasil, em 2004, 2006 e 2010, respectivamente. Atualmente é professor no Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da UFSC e pesquisador no Instituto de Eletrônica de Potência (INEP). A área de concentração do prof. Telles é em eletrônica de potência, com ênfase em energias renováveis (principalmente eólica de pequeno porte), inversores de tensão e conversores estáticos a capacitor chaveado. Prof. Telles é membro da Sociedade Brasileira de Eletrônica de Potência (SOBRAEP) e da IEEE Society.

**Roberto Francisco Coelho**, nascido em Florianópolis, SC, Brasil, em 19 de agosto de 1982. Recebeu os títulos de Engenheiro Eletricista, Mestre e Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil, em 2006, 2008 e 2013, respectivamente. Atualmente é professor no Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da UFSC onde desenvolve trabalhos relacionados com o processamento de energia proveniente de fontes renováveis, modelagem e controle de conversores estáticos, sistemas interligados à rede elétrica, técnicas de anti-ilhamento e estabilidade de microrredes. Prof. Roberto é membro do IEEE e da SOBRAEP.